УДК 517.272

ФУНКЦИЯНЫН ЭКСТРЕМУМДАРЫН ИЗИЛДӨӨ ЖОЛДОРУ

Султанова Назийпа Зулпукаровна
Ош мамлекеттик педагогикалык университети,
snazipaz@gmail.com
Момунова Нурайым Дүйшөналиевна
0777703206 Nuray-87-87-@mail.ru

Аннотоция. Макалада функциянын сыналуучу чекиттерин табуу, функциянын максимум, минимумдары жөнүндө түшүнүктөр, функциянын экстремумдарын табуу этаптары, функциянын экстремумга ээ болушунун зарыл шарты баяндалды. Ошондой эле функциянын экстремумга ээ болушунун 1-, 2- жетиштүү шарттары, элементардык жана татаал функциялардын экстремумдарын изилдөө жолдору каралды. Айрым мисалдардын максимум, минимумдары графикте сызылып, көрсөтүлдү. Биринчи, экинчи тартиптеги туундунун жардамында экстремумдарды изилдөөгө карата мисалдардын иштелмелери камтылды.

Ачкыч сөздөр: Функция**, с**ыналуучу чекиттер, функциянын туундусу, осүүчү функция, функциянын максимум, минимумдары, зарыл шарт, 1-жетиштүү шарт, 2-жетиштүү шарт, татаал функциялар.

СПОСОБЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ

Султанова Назийпа Зулпукаровна старший преподаватель,
snazipaz@gmail.com, ОшГПУ
Момунова Нурайым Дүйшөналиевна старший преподаватель, ОшГПУ

Аннотоция. В статье описано нахождение критические точек функции, понятия максимума и минимума функции, этапы нахождения экстремума функции, необходимые условия существования экстремума у функции. Также рассмотрены 1-е и 2-е достаточные условия существования экстремума функции, способы исследования экстремумов элементарных и сложных функций. Максимум и минимум некоторых примеров показаны на графике. Приведены примеры исследования экстремумов с помощью первой и второй производной.

Ключевые слова: Функция, критические точки, производная функции, возрастающая функция, максимум, минимум функции, необходимое условие, 1-е достаточное условие, 2-е достаточное условие, сложные функции.

METHODS FOR STUDYING FUNCTION EXTREMA

Sultanova Naziipa Zulpukarovna senior teacher,
Osh State Pedagogical University, snazipaz@gmail.com
Momunova Nurayim Duishonalievna senior teacher

Annotation. The article describes finding the critical points of a function, the concepts of maximum and minimum of a function, the stages of finding the extremum of a function, the necessary conditions for the existence of an extremum of a function. Also considered 1st and 2nd sufficient conditions for the existence of an extrema of a function, methods for studying extrema of elementary and complex functions. The maximum and minimum of some examples are shown on the graph. Examples of studying extrema using the first and second derivatives are given.

Key words: Function, critical points, derivative of a function, increasing function, maximum, minimum of a function, necessary condition, 1st sufficient condition, 2nd sufficient condition, complex functions.

1. Функциянын экстремумгу ээ болушунун зарыл шарты.

$[a,b]$ кесиндисинде аныкталган $f(x)$ функциясы берилсин.

Эгерде x_0 чекитинин кандайдыр бир $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймагындагы бардык x тер үчүн дайыма $f(x)<f(x_0)$ барабарсыздыгы орун алса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде максимумга, ал эми $f(x)>f(x_0)$ барабарсыздыгы орун алса $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде минимумга ээ болот.

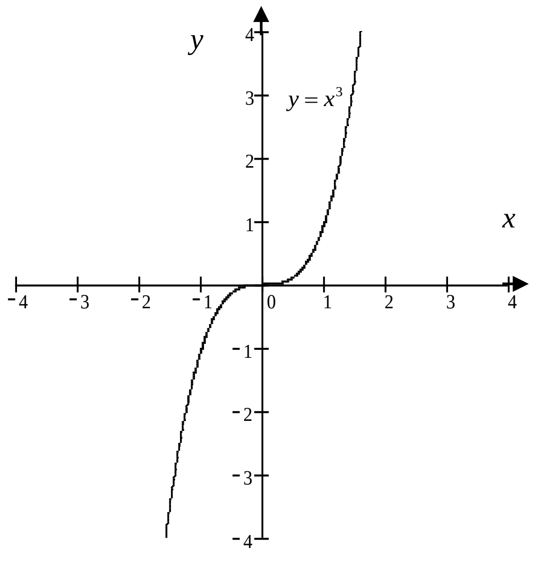
Функциянын максимуму менен минимумдары функциянын экстремумдары деп аталышат.

Эгерде x_0 чекити функциянын экстремум чекити болсо, анда ал чекитте функциянын биринчи туундусунун нөлгө айланат же жашабайт. Бул шарт функциянын экстремумга ээ болушунун зарыл шарты болуп саналат.

Функциянын аныкталуу областына тиешелүү болуп, функциянын биринчи туундусу нөлгө айланган же туундусу жашабаган чекиттер биринчи түрдөгү сыналуучу (критикалык) чекиттер деп аталат [1]. Мисалы, $y=x^2$ функциясы берилсин. Бул функциянын туундусун нөлгө барабарлап сыналуучу чекиттерин табабыз: $y'=2x,\ 2x=0,\ x=0.$

Демек $x=0$ чекитинде $f'(x)$ туунду нөлгө айланат. Ошондуктан $x=0$ чекити сыналуучу чекит болот.

$y=x^2$ функциясы дайыма оң мааниге ээ болгондуктан, $x=0$



1-*чийме*

сыналуучу чекитте $y=0$ болуп минимумга ээ болот.

Бардык эле сыналуучу чекиттерде функция экстремумга ээ боло бербейт.

1-мисал. $y=x^3$ функциянын экстремумдарын тапкыла.

Чыгарылышы. Бул функция үчүн сыналуучу чекиттерди табалы. Ал үчүн функциянын туундусун таап, табылган туундуну нөлгө барабарлап, пайда болгон теңдемени чыгарабыз:

$$y'=3x^2, \quad 3x^2=0, \ x=0.$$

$x=0$ сыналуучу чекитинде функция экстремумга ээ болбойт, себеби $y=x^3$ функциясы дайыма өсүүчү функция (1-чийме).

2. Экстремумдун биринчи жетиштүү шарты.

$y=f(x)$ функциясы үчүн x_0 чекити сыналуучу чекит болсун жана бул чекиттин кандайдыр бир δ аймагында $f'(x)$ туундусу бар болсун. Анда

1) Эгерде $f'(x)$ туундусу x_0 чекити аркылуу өткөндө оң мааниден терс мааниге өтсө, анда x_0 максимум чекити болот.

2) Эгерде $f'(x)$ туундусу x_0 чекити аркылуу өткөндө терс мааниден оң мааниге өтсө, анда x_0 минимум чекити болот.

3) Эгерде $f'(x)$ туундусу x_0 чекити аркылуу өткөндө белгисин өзгөртпөсө, анда функция экстремумга ээ болбойт.

Функциянын экстремумдарын биринчи туундунун жардамы менен табалы:

1-мисал. $f(x)=\sin x+\cos x, \quad x\in[0,2\pi]$ функциянын экстремумдарын тапкыла.

Чыгарылышы. 1) Функциянын 1-туундусун табабыз:

Берилген функциянын туундусу $f'(x)=\cos x-\sin x$ болот.

2) Сыналуучу чекиттерин аныктайбыз. Ал үчүн туундуну нөлгө барабарлоодон алынган $\cos x-\sin x=0$ теңдемени чыгарабыз. Теңдеменин эки жагын $\cos x$ ке бөлсөк, $tgx-1=0$ теңдемеси алынат жана бул теңдеменин тамырлары $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, \quad k\in Z$ маанилери болушат. Берилиш боюнча $x\in[0,2\pi]$ болгондуктан, $x=\dfrac{\pi}{4}, \quad x=\dfrac{5\pi}{4}$ чекиттери гана сыналуучу чекиттер болушат.

3) Сыналуучу чекиттер $[0,2\pi]$ кесиндисин $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right), \left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right]$ аралыктарына бөлүшөт. Бул ар бир аралыктарда функциянын туундусунун белгисин аныктайбыз. Аралыктардын биринчи жана үчүнчүсүндө $f'(x)>0$, экинчисинде $f'(x)<0$ болот, анткени

$$0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), \quad f'(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1 > 0;$$

$$\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0;$$

$$\frac{3\pi}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right], \; f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$$

аткарылат. Мындан $x = \frac{\pi}{4}$ максимум чекити, $x = \frac{5\pi}{4}$ минимум чекити экендиги белгилүү болот [5].

4) Функциянын максималдык жана минималдык маанилерин табабыз.

$$y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$y_{\min} = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}.$$

2-мисал. $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ функциянын экстремумдарын тапкыла.

Чыгарылышы. Функция бүткүл сан огунда аныкталган.

1) Функциянын туундусун эсептейбиз:

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) \qquad (*)$$

2) y' туундусун нөлгө барабарлап, $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) = 0$ теңдемесин чыгарсак, $x = -1$ чекитине ээ болобуз. Функциянын туундусу $x = 0$ чекитинде табылбайт. Ошондуктан $x = -1$ жана $x = 0$ чекиттери биринчи түрдөгү сыналуучу чекиттер болуп эсептелинет.

3) Бул чекиттер сан огун $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$ үч интервалга бөлөт.

$(-\infty;-1)$ интервалында $y' > 0$, $(-1;0)$ интервалында $y' < 0$ жана $(0;+\infty)$ аралыгында $y' < 0$ болгондуктан, $x = -1$ максимум, $x = 0$ минимум чекиттери болушат.

$(-\infty;-1), (-1;0), (0;+\infty)$ интервалдарында y' туундунун белгисин аныктоодо ал интервалдын ар биринен бирден чекит алып, ал чекиттердеги туундунун белгисин аныктоо бир кыйла кыйынчылыкты туудурат. Ошондуктан $x = -1$ чекити экстремум чекити экендигин изилдөө үчүн h санын-жетишээрлик кичине оң сан деп алып,
$x = -1 + h$ жана $x = -1 - h$ маанилеринде y' туундусунун белгисин аныктайбыз.

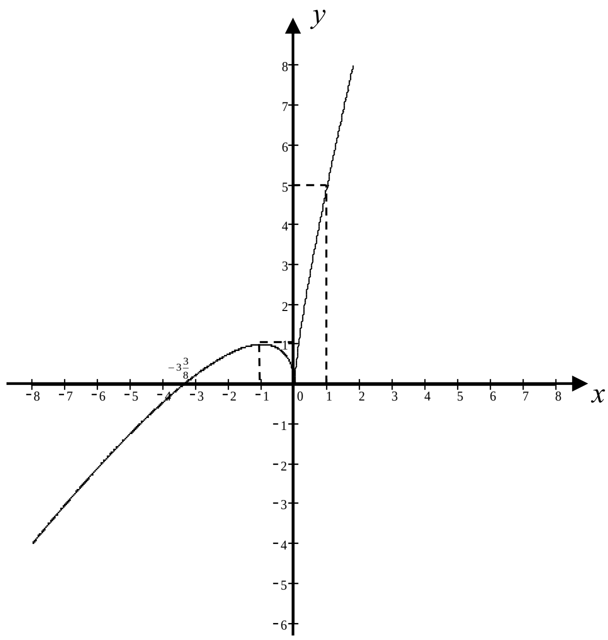
$x = -1 - h$ маанисинде (*) туюнтмасынан $y' > 0$, ал эми $x = -1 + h$ болгондо $y' < 0$ экендигин билип алууга болот. Ушул эле сыяктуу $x = 0$ экстремум чекити болобу же болбойбу деген суроого жооп берүүгө болот.

(*) туюнтмасынан $x=-h$ болгондо $y'<0$, $x=h$ маанисинде $y'>0$ экендиги аныкталат (2-чийме).

$x=-1$ чекитинин экстремум чекити экендигин $y''=-\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$ экинчи туундунун жардамында да көрсөтүүгө болот. $x=-1$ маанисинде $y''(-1)<0$ болгондуктан, $x=-1$ максимум чекити болуп эсептелет.

4) Экстремум чекиттериндеги функциянын маанилерин аныктайбыз:

$y_{\max}=\ y(-1)=1,\quad y_{\min}=y(0)=0$ [6].



2-чийме

3. Экстремумдун экинчи жетиштүү шарты.

Эгерде $f'(x_0)=0$ болуп, ал эми $f''(x_0)\neq 0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын экстремум чекити болот, атап айтканда $f''(x_0)>0$ болсо, x_0 минимум чекити, $f''(x_0)<0$ болсо, x_0 максимум чекити болот.

1-мисал. $f(x)=x^4-2$ функциянын экстремумдарын изилдегиле.

Чыгарылышы. Берилген функция $(-\infty,+\infty)$ интервалында аныкталган.

1) Функциянын биринчи тартиптеги туундусу $f'(x)=4x^3$ болот.

2) $4x^3=0$ теңдемесин чыгаруу менен $x=0$ биринчи түрдөгү сыналуучу чекитине ээ болобуз.

3) $f''(x)=12x^2$.

4) $f''(0)=0$. Бул учурда сыналуучу чекитте функциянын экинчи туундусу нөлгө барабар болгондуктан, берилген функциянын экстремумун экинчи тартиптеги туундунун негизинде изилдөөгө болбойт. Ошондуктан биринчи туундунун жардамы менен экстремумдарды табабыз:

$x<0$ болгондо $f'(x)<0$, $x>0$ болгондо $f'(x)>0$. Демек $x=0$ минимум чекити. Бул чекиттеги функциянын мааниси [6]:

$$f_{\min}=f(0)=2.$$

2-мисал. $y=\sqrt[3]{x^2}$ функциянын экстремумдарын экинчи тартиптеги туундунун негизинде аныктоого болобу?

Чыгарылышы. Берилген функция $(-\infty,+\infty)$ интервалында аныкталган.

1)Функциянын биринчи тартиптеги туундусу $y' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ болот.

2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$ теңдемесинин чыгарылышы жок болгондуктан, берилген функциянын туундусу табылбаган $x = 0$ чекити гана сыналуучу чекит болот.

3) Бирок, $x = 0$ чекитинде функциянын y'' туундусу табылбагандыктан экинчи туунду боюнча берилген функциянын экстремумдарын изилдөөгө болбойт, тагыраак айтканда $x = 0$ чекитинин экстремум чекити экендигин изилдөөгө мүмкүн эмес. Экстремумду 1-туунду боюнча изилдейбиз:

$x = 0$ сыналуучу чекити сан огун $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ интервалдарга бөлөт. $(-\infty;0)$ интервалындагы $x = -1$ чекитинде $y'(-1) < 0$, $(0;+\infty)$ интервалындагы $x = 1$ чекитинде $y'(1) > 0$ болгондуктан, $x = 0$ чекити минимум чекити болот.

4) $x = 0$ минимум чекитинде функция $y_{\min} = y(0) = 0$ маанисине барабар [4].

Колдонулган адабияттар

1. М.Л. Краснов и др. Вся высшая математика, том 1. М.: «УРСС», 2002.
2. П.Е.Данко, А.Г. Попов и.др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть I. М.: «Оникс», 2009.
3. В.С.Шипачев Высшая математика. М.: «Высш.шк.», 2005.
4. Г.С.Бараненко, Б.П.Демидович Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. М.: «Астрель», 2003.
5. И.А.Каплан, В.И.Пустынников Практикум по высшей математике, том 1. М.: «Эксмо», 2006.
6. О.В.Мантуров, Н.М.Матвеев Курс высшей математики. М.: «Высш.шк.»,1986.