%83%D1%81%D0%BA_18%20%D1%81%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8F%D0%B1%D1%80%D1%8C%20%282%29.pdf?utm_source=chatgpt.com [149-155]
2. https://cyberleninka.ru/article/n/geymifikatsiya-v-obrazovanii-3/viewer
3. Букина Т.Г., Нестерова В.Е. Методика проведения викторины "Своя игра" на этапе контроля усвоения пройденного материала // Кронос. - 2021. - №12(62). - С. 18-20.
4. Мурзагалина Г.М., Тихомирова Г.В., Филиппова О.В., Корнеева Н.Ю., Галиакберова В.Н. Геймификация в образовании как фактор повышения интереса к усвоению учебного материала // Московский экономический журнал. - 2022. - №4. - С. 494-501.
5. Коваль Н.Н. Геймификация в образовании // Педагогическая наука и практика. - 2016. - №2(12). - С. 25-29.
6. https://ilim.oshmpu.kg/index.php/01/article/view/252/173- 183-бет
7. https://ilim.oshmpu.kg/index.php/01/article/view/198/118 119-бет

УДК 517.2 **DOI: https://doi.org/10.56122/..v2i2%20(26).404**

ВОЛЬТЕРРАНЫН ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИ МЕНЕН СЫЗЫКТУУ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕЛЕРДИН АРАСЫНДАГЫ БАЙЛАНЫШТАР

Зулпукаров Жакшылык Алибаевич - ф.-м.и.к., доцент, ОшТУ
ORCID: 0009-0002-9795-6369, E-mail. zulpukarov66@mail.ru
Абдулла кызы Элнура - магистрант,ОшМПУ
Абдимиталип кызы Аида – магистрант ОшМПУ

Аннотация

Бул макала сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңделер менен биринчи жана экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесинин байланышы мисалдардын жардамында иштелип чыккан. Тескерисинче жөнөкөй экинчи тартиптеги бир тектүү жана бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди Вольтерранын биринчи жана экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелерине келтирилип чыгаруу ыкмасы каралган. Сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңделердеги мисаларды Maple программасындагы **dsolve** командасы аркылуу чыгарылышын, сандык чыгарылышын, болжолдуу чыгарылышын жана графиги менен көрсөтүүгө мүмкүндүк берет. Биринчи жана экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгы жана жашашы боюнча теореманы канааттандырганын Коши маселеси боюнча өзгөчөлүктөргө ээ болбогон чекиттерде мисалдардын жардамында көрсөтүлгөн.

Урунттуу сөздөр: дифференциалдык теңдеме, интегралдык теңдемелер, чыгарылыш, баштапкы шарт, Коши маселеси.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРЫ И ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Зулпукаров Жакшылык Алибаевич к.ф.-м.н., доцент, ошТУ
ORCID: 0009-0002-9795-6369, E-mail. zulpukarov66@mail.ru
Абдулла кызы Элнура – магистрантка ОшГПУ
Абдимиталип кызы Аида – магистрантка ОшГПУ

Аннотация.

В данной статье рассматривается взаимосвязь линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с интегральными уравнениями Вольтерры первого и второго рода с примерами. Напротив, предлагается метод сведения простых

однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка к интегральным уравнениям Вольтерры первого и второго рода. Он позволяет решать, решать численно, приближенно решать и строить графики примеров линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью команды dsolve в Maple. Решение интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода удовлетворяет теореме о единственности и существовании в точках, не имеющих особенностей в задаче Коши.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральное уравнение, решение, начальное условие, задача Коши.

RELATIONSHIPS BETWEEN VOLTERRA'S INTEGRAL EQUATIONS AND LINEAR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich - Ph.D., Associate Professor, Osh Technological University
ORCID: 0009-0002-9795-6369, Email. zulpukarov66@mail.ru
Abdulla kyzy Elnura - master's student, Osh State Pedagogical University

Abdimitalip kyzy Aida - master's student Osh State Pedagogical University

Abstract.

This article discusses the relationship between linear homogeneous and inhomogeneous second-order differential equations and Volterra integral equations of the first and second kind with examples. On the contrary, a method is provided for reducing simple homogeneous and inhomogeneous linear second-order differential equations to Volterra integral equations of the first and second kind. It allows you to solve, numerically solve, approximate solve, and graph examples of linear homogeneous and inhomogeneous second-order differential equations using the dsolve command in Maple. The solution of Volterra integral equations of the first and second kind satisfies the theorem on uniqueness and existence at points that do not have singularities in the Cauchy problem.
Key words: differential equation, integral equations, derivative, initial condition, Cauchy problem.

Киришүү. Геометриянын, физиканын жана механиканын жана ар кандай маселелерин чыгарууда көбүнчө өзгөрмөлөрдү, белгисиз функцияны жана белгисиз функциянын туундуларын камтыган теңдемелерге келтирилет. Мындай келип чыккан теңдемелерди көбүнчө дифференциалдык теңдемеге же инегралдык теңдеме деп айтабыз.

Эгерде белгисиз функция бир өзгөрмөлүү функциялар болсо, анда кадимки дифференциалдык теңдемелер деп айтабыз. Эгерде белгисиз өзгөрмөлөр бир нече өзгөрмөлүү функциялар болсо, анда теңдемелер жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер деп аталат.

Кадимки дифференциалдык теңдемелерди Вольтерранын интегралдык теңдемесине алып келип болжолду чыгаруу методун карайбыз [3]. Мындай байланыштары бар теңдемелерди бирөөнү чыгарып, экинчи теңдеме аркылуу чыгарылышын текшерсе болоору көрсөтүлгөн. Maple программасынын пакеттердин жардамы менен чыгарылышын көрсөтсө болот [1,2,5].

Сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеси баштапкы шарттары аркылуу берилсин

$$L(y) \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = F(x), \qquad a < x < b, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1,$$

мында $q(x)$, $p(x)$, $f(x)-$ берилген $[a,b]$ сегментинде белгилүү функциялар жана ушул сегменте үзгүлтүксүз, $y=y(x)-$ изилденүүчү функция $x_0\in(a,b)$ жана төмөндөгүдөй шарттарды канааттандырган

$$y(x)\in C[a,b]\cap C^2(a,b),$$

(2)

$$Ly(x)\equiv f(x), \qquad x\in(a,b),$$

(3)

$$y(x_0)=y'(x_0)=0, \qquad x_0\in(a,b).$$

(4)

(2)-(4) маселеге туура келүүчү Вольтерранын интегралдык теңдемени тургузуу үчүн биз төмөндөгүлөрдү колдонобуз

$$y''(x)=\varphi(x),$$

(5)

(5) деген белгилөөсүн эки жагын тең x_0 дөн x ка чейин интегралдап анда

$$\frac{dy'}{dx}=\varphi(x)\Rightarrow dy'=\varphi(x)dx\Rightarrow\int_{x_0}^{x}dy'(t)=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t)\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt\Rightarrow y'(x)=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt+y_1 \qquad (6)$$

акыркы (6) теңдемесин дагы бир жолу интегралдап жана Дирихленин формуласын колдонсок

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)\varphi(t)dt+y_1x+y_0 \qquad (7)$$

(5) жана (7) эске алуу менен (1) экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеден жазабыз

$$\varphi(x)+p(x)\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt+y_1\right)+q(x)\left(\int_{x_0}^{x}(x-t)\varphi(t)dt+y_1x+y_0\right)=f(x),$$

Акыркы теңдемени өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамында

$$\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}\left[p(x)+(x-t)q(x)\right]\varphi(t)dt=f(x)-y_1p(x)-(y_1x+y_0)q(x) \qquad (8)$$

Деген Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесин алабыз.

Мында $K(x,t)=p(x)+(x-t)q(x)$ -ядро, $F(x)=f(x)-y_1p(x)-(y_1x+y_0)q(x)$ -белгилүү функция $y_1,y_0\in R$

(8) теңдемеси $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүз жана жалгыз чечими жашайт Коши маселесинин (1) чыгарылышы бар жана жалгыздыгы келип чыгат.

1-мисал. $y''(x)+y(x)=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ теңдемени интегралдык теңдемеге келтирүү жолу менен чыгаргыла [4].

Чыгаруу. Биз $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$ деп белгилесек, анда $y(x)$ белгисиз функцияны табуу үчүн эки жолу интегралдоо жолу менен

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(t)dt+y'(0)=\int_0^x\varphi(t)dt, \qquad y(x)=\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+1.$$

табылгандарды жана белгиленгенди дифференциалдык теңдемеге коюп

$$\varphi(x)+\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+1=0,$$

Деген экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемени алабыз. Мында ядро $K(x,t)=x-t$, белгилүү функция $f(x)=-1$. Табылган теңдемени удаалаш жакындатуу методу менен чыгарабыз. Ал үчүн $\varphi_0(x)=-1$ тандайбыз. Андан кийин

$$\varphi_1(x)=-1-\int_0^x(x-t)(-1)dt=-1+\int_0^x(x-t)dt=-1+(xt-\frac{t^2}{2})\Big|_0^x=-1+\frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=-1-\int_0^x(x-t)\left((-1+\frac{1}{2}t^2\right)dt=-1+\int_0^x(x-\frac{xt^2}{2}-t+\frac{t^3}{3})dt=-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4$$

Биз $\varphi_n(x)$ жакындообуз

$$\varphi_n(x)=-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

Мындан биз $\varphi(x)$ табуу учун $n\to\infty$ пределин изилдесек

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x.$$

Мындан биз $n\to\infty$ пределине тапсак $\varphi(x)=\cos x$ деген интегралдык теңдеменин чыгарылышын алабыз. Бул чыгарылыш теңдеменин дагы чыгарылышы болот.

Эми ушул дифференциалдык теңдемени Maple программасындагы **dsolve** командасы аркылуу чыгарылган көрсөтөлү. Ал үчүн керектүү командаларды берип [5].

> *restart*;

de := *diff*$(y(x), x\$2)+y(x)=0$;

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+y(x)=0$$

cond := $y(0)=1, D(y)(0)=0$;

$$y(0)=1, D(y)(0)=0$$

$dsolve(\{de, cond\}, y(x));$

$$y(x) = \cos(x)$$

Тескерисинче, Вольтерранын биринчи жана экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин чыгарылышы менен кадимки сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышы барабар болушат.

Эгерде экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемедеги $y(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)y(t)dt + f(x)$, $K(x,t)$ ядросу жана $f(x)$ белгилүү функциялары x боюнча туундуларга ээ болсо, анда бул теңдеме бир же бир нече жолу чыгарылышы бири-биринен турактуу чоңдукка айырмаланат.

Экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесин туунду алуу жолу менен эсептелет

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)dt + f(x)\right) = \lambda K(x,x)y(x) + \lambda\int_a^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}y(t)dt + f'(x), \qquad (9)$$

2-*мисал*. Экинчи түрдөгү $y(x) = x+1+\int_0^x y(t)dt$, $x \in R$ Вольтерранын интегралдык теңдемесин дифференциалдык теңдеме аркылуу чечимин тапкыла.

Чыгаруу. (9) теңдемени x өзгөрмөсүнө карата туунду изилдейбиз

$$y'(x) = (x+1+\int_0^x y(t)dt)' = 1+y(x), \qquad y'(x) = 1+y(x)$$

Мындан биз $x=0$ деп интегралдык теңдемеге коюп $y(0)=1$ деген баштапкы шартты алабыз. Ал эми бул дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы

$$y'(x) = 1+y(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1+y \Rightarrow \frac{dy}{1+y} = dx \Rightarrow \int\frac{dy}{1+y} = \int dx + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln(1+y) = \ln e^x + \ln C \Rightarrow \ln(1+y) = \ln Ce^x \Rightarrow 1+y = Ce^x \Rightarrow y = Ce^x - 1$$

$y(0)=1$ баштапкы шартын колдонуп $y = 2e^x - 1$ деген жеке чыгарылышын алабыз.

Текшерүү. $y(x) = x+1+\int_0^x y(t)dt$ интегралдык теңдемесине $y = 2e^x - 1$ жекече чыгарылышын коёлу

$$2e^x - 1 = x+1+\int_0^x (2e^t - 1)dt = x+1+(2e^x - t)\Big|_0^x = x+1+2e^x - x - 2e^0 - 0 = 2e^x - 1$$

Эми ушул $y'(x) = 1+y(x)$, $y(0)=1$ Коши маселесин Maple программасында чыгарабыз [4].

```
> restart;
```

$de := diff\,(y(x), x) - y(x) - 1 = 0;$

$$\frac{d}{dx}\, y(x) - y(x) - 1 = 0$$

$cond := y(0) = 1;$

$$y(0) = 1$$

$dsolve(\{de, cond\}, y(x));$

$$y(x) = -1 + 2\,e^{x}$$

Деген чыгарылышка ээ болот.

3-*мисал.* интегралдык теңдемени $y(x) = x + \int_0^t xty(t)dt$ дифференциалдык теңдемеге келтирип чыгаргыла.

Чыгаруу. Теңдемеден x озгормосн кашанын сыртына чыгарсак $y(x) = x\left(+ \int_0^t ty(t)dt \right)$ мындан $z(x) = 1 + \int_0^t ty(t)dt$ белгилөөү колдонсок, анда

$$y(x) = x \cdot z(x)\ , \qquad (*)$$

барабардыгына ээ болобуз. $y(x) = x\left(+ \int_0^t ty(t)dt \right)$ эки жагынан x боюнча туунду алабыз $z'(x) = \left(1 + \int_0^t ty(t)dt \right)' = ty(x) \Rightarrow z'(x) = ty(x)$

(*) эске алуу менен $z'(x) = x^2 z(x)$ кадимки өзгөрмөгө ажыралуучу дифференциалдык теңдемени алабыз. Демек бул теңдеменин жалпы чыгарылышы $z(x) = Ce^{\frac{x^3}{3}}$. Мындан биз z(0) = 1, болгондо C = 1 болгонун табабыз. Ошентип, теңдеменин чыгарылышы $y(x) = xe^{\frac{x^3}{3}}$ алабыз.

4-*мисал.* $y''(x) + y(x) = f(x)\,, \qquad x \in R\,,$

(10)

мында $f(x)$ -функциясы $x \in (-\infty, +\infty)$ үзгүлтүксүз функция,

$$y(0) = y'(0) = 0\,,$$

(11)

интегралдык теңдемеге келтирүү аркылуу [6].

Чыгаруу. (10) теңдемеде $p(x)\equiv 0$ жана $q(x)=1$, x_0=0. Анда (10) жана (11) формуласын колдонуп төмөндөгүнү алабыз

$$\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}(x-t)\varphi(t)dt = f(x),$$

(12)

мында $y''(x)=\varphi(t)$. (12) теңдеменин удаалаш жакындатуу методу аркылуу чыгарабыз.

$$K(x,t)=K_1(x,t)=x-t,$$

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,s)K_1(s,t)ds=\int_t^x (x-s)(s-t)ds=\frac{(x-t)^3}{3!},$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x K(x,s)K_2(s,t)ds=\int_t^x (x-s)\frac{(s-t)^3}{3!}ds=\frac{(x-t)^5}{5!},$$

…………………………………………………………………..,

$$K_n(x,t)=\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!},\qquad n\in N.$$

Анда резольвента төмөндөгүгө барабар болот

$$R(x,t,-1)=(x-t)-\frac{(x-t)^3}{3!}+...+(-1)^{n-1}\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}+... .$$

Бул катар, $(x-t)$даражалык катар болот. Анда $R(x,t,-1)=\sin(x-t)$ жана (12) теңдеменин жалгыздык чыгарылышы жашайт

$$\varphi(x)= f(x)-\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt.$$

(13)

(13) теңдемени (11) жардамында жалгыз чыгарылышын табабыз:

$$y(x)=\int_0^x (x-t)[f(t)-\int_0^t \sin(x-s)f(s)ds]dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt-\int_0^x (x-t)\int_0^t \sin(x-s)f(s)dsdt. \qquad (14)$$

(14) интегралдоо методу менен чыгарабыз

$$\int_0^x (x-t)\int_0^t \sin(x-s)f(s)dsdt=\int_0^t f(s)ds\int_s^x (x-t)\sin(t-s)dt=\int_0^x [(x-s)-\sin(x-s)]f(s)ds.$$

(15)

(14) эске алуу менен (15) теңдемеден төмөнкүнү алабыз

$$y(x)=\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt.$$

(16)

Ошентип, (10)-(11) Коши маселесинин жалгыз чыгарылышы жашайт жана чыгарылышы (16) интегралдык теңдеме менен аныкталат.

Корутунду

Бул макалада биринчи жана экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемеси кадимки сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердине алып келип чыгаруунун методу каралган. Же тескерисинче сызыктуу бир тектүү жана бир тектүү эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелери биринчи жана экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесине келтирилип чыгарылган. Дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары *Maple* программасында чыгарылып көрсөтүлгөн.

Колдонулган адабияттар

1. Волков Е.А., Лизоркин П.И. Интегральные и дифференциальные уравнения. М.: МИФИ, 1977.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.
3. Попов В.А. Сборник задач по интегральным уравнениям. Казань: КГУ, 2006.
4. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в *Maple*: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.
5. Зулпукаров Ж. А., Рахматдула уулу Т., Эгемберди кызы Г. Построение функции Грина для дифференциальных уравнений второго порядка с однородными краевыми условиями ОшТУ Известия 2025.–С. 160-166. elibrary_80543046_68953683.pdf

УДК: 37:9

БАШТАЛГЫЧ КЛАССТАРДА КОШУУ ЖАНА КЕМИТҮҮ АМАЛДАРЫН ОКУТУУДА ЭЛЕКТРОНДУК ПЛАТФОРМАЛАРДЫ КОЛДОНУУ МЕТОДИКАСЫ

Ташматова Вилюра Абдиллакимовна - окутуучу, ОшМПУ
ORCID: 0009-0001-2239-6902, vilura.info@gmail.com
Кабылова Света Амантуровна - п.и.к.,доцент, Ж. Баласагын атындагы КУУ
ORCID: 0009-0005-0234-2738, Svetaamanturovna@gmail.com

МЕТОДИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПЛАТФОРМ ПРИ ОБУЧЕНИИ СЛОЖЕНИЮ И ВЫЧИТАНИЮ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Ташматова Вилюра Абдиллакимовна – преподаватель ОшГПУ
ORCID: 0009-0001-2239-6902, vilura.info@gmail.com
Кабылова Света Амантуровна - п.и.к.,доцент, КУУ имени Ж. Баласагына
ORCID: 0009-0005-0234-2738, Svetaamanturovna@gmail.com

METHODOLOGY FOR USING ELECTRONIC PLATFORMS IN TEACHING ADDITION AND SUBTRACTION IN PRIMARY SCHOOL

Tashmatova Vilyura Abdillakimovna - Teacher of OshSPU
ORCID: 0009-0001-2239-6902, vilura.info@gmail.com
Kabylova Sveta Amanturovna - Ph.D., Associate Professor,
Kyrgyz National University named after J. Balasagyn
ORCID: 0009-0005-0234-2738, Svetaamanturovna@gmail.com