УДК:51/510.(373.167.1;51) DOI: https://doi.org/10.56122/..v1i1.598

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДЕГИ ТУРМУШТУК МАСЕЛЕЛЕРДИ МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДӨӨ

Маматова Замира Батырбековна
Ош МПУ,ага окутуучу
zamirabatyrbekovna@gmail.com
магистрант ,Куддусбек кызы Зинфира

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЖИЗНЕННЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Маматова Замира Батырбековна
Ошский государственный педагогический университет, старший преподаватель
zamirabatyrbekovna@gmail.com
Магистрант: Куддусбек кызы Зинфира

MATHEMATICAL MODELING OF REAL-LIFE PROBLEMS BASED ON DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zamira Batyrbekovna Mamatova
Osh State Pedagogical University, Senior Lecturer
zamirabatyrbekovna@gmail.com
Master’s student: Zinfira Kuddusbek Kyzy

Аннотация

Бул макалада дифференциалдык теңдемелерге негизделген математикалык моделдөө турмуштук системалардын динамикасын изилдөөнүн универсалдуу жана фундаменталдык ыкмасы катары каралат. Реалдуу дүйнөдөгү физикалык, биологиялык, экономикалык жана инженердик процесстер көпчүлүк учурда үзгүлтүксүз өзгөрүү мүнөзүнө ээ болгондуктан, алардын жүрүмүн так сүрөттөө үчүн өзгөрмөлөрдүн убакыт же мейкиндик боюнча өзгөрүү ылдамдыгын чагылдырган дифференциалдык теңдемелер колдонулат. Макалада Ньютондун механикалык моделдери, Мальтус жана логистикалык популяция динамикасы, эпидемиологиядагы SIR тибиндеги моделдер, капиталдын өсүшүн сүрөттөгөн экономикалык теңдемелер жана R,L,C-чынжырлардын инженердик моделдери сыяктуу турмуштук мааниге ээ мисалдар талданып, алардын математикалык формуласын жана чечүү ыкмалары берилет. Ошондой эле аналитикалык жана сандык методдордун ролу, моделдердин интерпретациясы жана алардын практикалык мааниси каралат. Изилдөөнүн жыйынтыгы катары дифференциалдык теңдемелер реалдуу процесстердин ички мыйзам ченемдүүлүгүн ачып берүүдө жана алардын жүрүмүн алдын ала божомолдоодо өзгөчө күчтүү инструмент экендиги көрсөтүлөт.

Ачкыч сөздөр: *дифференциалдык теңдемелер; математикалык моделдөө; динамикалык система; аналитикалык ыкмалар; сандык ыкмалар; популяция динамикасы; эпидемиологиялык моделдер; механикалык моделдер; экономикалык өсүү; R,L,C-чынжыры; дифференциалдык система; прогноздук моделдер; турмуштук процесстер*

Аннотация

В данной статье рассматривается математическое моделирование на основе дифференциальных уравнений как универсальный и фундаментальный метод исследования динамики жизненных систем. Поскольку физические, биологические, экономические и инженерные процессы в реальном мире часто характеризуются непрерывными изменениями, для точного описания их хода используются дифференциальные уравнения,

отражающие скорость изменения переменных во времени или пространстве. В статье рассматриваются ньютоновские механические модели, мальтузианская и логистическая динамика популяций, модели типа SIR в эпидемиологии и экономические уравнения, описывающие рост капитала. Анализируются реальные примеры инженерных моделей R-, L- и C-цепей, приводятся их математические формулы и методы решения. Рассматривается роль аналитических и численных методов, интерпретация моделей и их практическое значение. Результаты исследования показывают, что дифференциальные уравнения являются особенно мощным инструментом для выявления внутренних закономерностей реальных процессов и прогнозирования их течения.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; математическое моделирование; динамическая система; аналитические методы; численные методы; динамика популяций; эпидемиологические модели; механические модели; экономический рост; R,L,C-цепь; дифференциальная система; модели прогнозирования; жизненные процессы*

Abstract

This article examines mathematical modeling based on differential equations as a universal and fundamental method for studying the dynamics of life systems.

Since physical, biological, economic, and engineering processes in the real world are often characterized by continuous change, differential equations reflecting the rate of change of variables in time or space are used to accurately describe their course. This article examines Newtonian mechanical models, Malthusian and logistic population dynamics, SIR-type models in epidemiology, and economic equations describing capital growth. Real-world examples of engineering models of R-, L-, and C-chains are analyzed, along with their mathematical formulas and solution methods. The results of the study show that differential equations are a particularly powerful tool for identifying internal patterns of real processes and predicting their course.

Keywords: *differential equations; mathematical modeling; dynamic system; analytical methods; numerical methods; population dynamics; epidemiological models; mechanical models; economic growth; R,L,C-chain; differential system; forecasting models; life processes*

Дифференциалдык теңдемелерге негизделген математикалык моделдөө — реалдуу дүйнөдөгү динамикалык процесстердин түзүлүшүн жана жүрүмүн анализдөөнүн негизги методологиялык каркасы болуп эсептелет. Белгилүү математик Н. Винер белгилегендей: *«Табият кубулуштарын түшүнүү — бул, биринчи кезекте, алардын өзгөрүү ылдамдыгын түшүнүү»*. Бул өзгөрүү ылдамдыгын формалдаштыруу дифференциалдык теңдемелерди колдонуу менен ишке ашат, анткени мындай теңдемелер «функциянын учурдагы абалы анын өзгөрүү темпин аныктайт» деген фундаменталдуу принципке негизделген.

Турмуштук системалардын басымдуу көпчүлүгү үзгүлтүксүз процесс катары каралып, алардын динамикасы убакыт боюнча өзгөрүү темптери аркылуу мүнөздөлөт. Мисалы, механикалык кыймылда Ньютондун белгилүү экинчи закону:

$$m\frac{d^2}{dt^2} = F(x,t)$$

дененин ылдамдануусу ага тийген күчтөн көз каранды экенин көрсөтүп, реалдуу кыймылдын математикалык моделин түзүүгө шарт түзөт. Бул теңдеме аркылуу системанын траекториясы, энергия балансы жана тышкы факторлордун таасири толук калыбына келтирилет. Илимий адабияттарда бул модель «механикалык системалардын динамикалык негизги теңдемеси» катары кабыл алынат [9].

Биологиялык процесстер да табиятынан динамикалык болгондуктан, алардын математикалык моделдөө структурасы дифференциалдык теңдемелерге негизделет. Мисалы, Популяция динамикасынын Мальтустун модели. Мальтус 1798-жылы Англиянын калкынын моделин иштеп чыккан. Эгерде популяцияны бир тектүү деп эсептесек (б.а. индивиддердин курамын жана өлчөмүн эске албаганда), анын өлчөмү экспоненциалдуу түрдө өзгөрөт. (Биз обочолонгон калк деп эсептейбиз, айлана-чөйрө туруктуу жана башка популяциялар эч кандай таасир этпейт. Биз мезгилдүүлүккө, төрөткө жана өлүмгө көңүл

бурбайбыз. Ошондо төрөлгөндөрдүн жана өлгөндөрдүн саны калктын санына пропорционалдуу болот). Өсүү темпи $\frac{\Delta N}{N \times \Delta t} = E$ формула менен туюнтулат, мында E - калктын өсүү темпи, N - калктын саны жана убакыт. Мальтусиялык модель - $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$, мында ε өсүү темпи. Популяциянын динамикасы үчүн Мальтус модели колдонулат. Мальтус калктын өсүү темпи убакыттын өтүшү менен бир аз өзгөрөт жана ε туруктуу деп эсептесе болот деп ойлогон. Адам популяциясында ε популяциянын саны менен оң корреляцияга ээ, б.а. популяция канчалык көп болсо, ε ошончолук чоңураак. Жаныбарларда терс корреляция байкалат. Мальтусиялык моделди

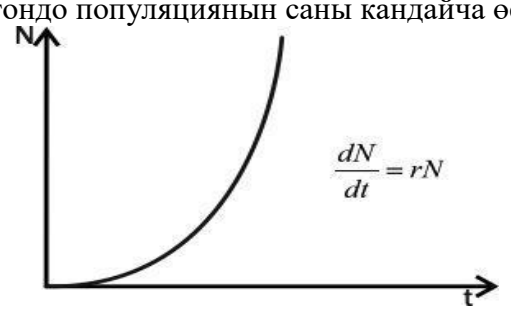
чечүү үчүн:

$N|_{t=0} = N_0$

$N = N_0 e^{-t-\varepsilon}$

мында: ε<0 - калктын саны кыскарууда, *ε>0* - өсүп жатат, *ε=0* – туруктуу.

Теңдеме көрсөткөндөй, эгерде убакыт арифметикалык прогрессия менен өлчөнө турган болсо, популяция геометриялык, б.а., экспоненциалдуу түрдө өсөт. N каршы t (экспоненциалдык функция) графиги биотикалык потенциал ийри сызыгы деп аталат жана чектөөчү факторлор болбогондо популяциянын саны кандайча өсөөрүн көрсөтөт.



Мальтус калктын мындай жогорку өсүш темпи акыры ресурстардын жетишсиздигине алып келет, ачарчылык, жугуштуу оорулар жана согуштар аны болтурбай коюуга мүмкүн деген жыйынтыкка келген.

Мальтус популяциянын өсүшүн төмөнкүдөй түзгөн:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

мында $N(t)$ — калктын саны, k — туруктуу өсүү коэффициенти. Бирок чыныгы шартта ресурстардын чектелүү экенин Лотка жана Вольтерра белгилеп, логистикалык модель сунуштаган:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{k})$$

Бул модель экологиялык системалардын туруктуулугун жана тең салмак абалын анализдөөгө кеңири колдонулат. Биологияда мындай теңдемелер тууралуу П. Ферхюльст: *«Өсүш — бул өзүн өзү чектеген процесс»* деп белгилеген [3].

Популяция динамикасын математикалык моделдөө биологияда, экологияда жана социалдык илимдерде өзгөчө мааниге ээ. Табияттагы популяциялар чексиз өсө албайт, анткени ресурстар (азыктар, жашоо мейкиндиги, суу, энергия) чектелген. Ошондуктан популяциянын өсүшүн түшүндүрүү үчүн жөнөкөй экспоненциалдык модель жетишсиз болуп калат. Ушул көйгөйдү чечүү максатында XIX кылымда бельгиялык математик Пьер Франсуа Ферхюльст логистикалык теңдемени сунуш кылган.

Логистикалык теңдеменин чыгарылышы

Ферхюльст ресурстардын чектелишин эске алуу үчүн өсүү ылдамдыгын популяциянын өлчөмүнө көз каранды кылып өзгөрткөн:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$$

Бул жерде:

- K — айлана-чөйрөнүн көтөрүмдүүлүк чеги

- $\frac{N}{K}$— чектөөчү фактор.

Бул көбөйтүүчү мүчөнүн мааниси:

- Эгер $N \ll KN$ болсо, анда $\frac{N}{K} \approx 0$ өсүү дээрлик экспоненциалдык.
- Эгер $N \to K$ болсо, анда $1 - \frac{N}{K} \to 0$, өсүү токтойт.
- Эгер $N > K$ болсо, өсүү терс болуп, популяция кыскарат.

Логистикалык модель төмөнкү тармактарда колдонулат:

- Экология — популяция динамикасы
- Эпидемиология — инфекциянын жайылышы
- Экономика — рыноктун каныгуусу
- Социалдык динамика — инновациянын кабыл алынышы

Мисалы, жаңы технологиянын таралышы башында жай, кийин тез өсөт, андан соң рынок каныгып, өсүү жайлайт — бул логистикалык ийри сызыкка туура келет.

Ферхюльст теңдемеси реалдуу системалардагы өсүш процессин моделдөөдө фундаменталдуу ролду ойнойт. Ал экспоненциалдык өсүштүн идеалдаштырылган моделинен айырмаланып, ресурстардын чектелишин эске алат. Теңдеменин аналитикалык чечими сигмоид формасында болуп, популяциянын узак мөөнөттүү жүрүм-турумун так сүрөттөйт.

Логистикалык модель — жөнөкөй, бирок терең мааниге ээ ал сызыктуу эмес динамикалык система болуп эсептелет.

Эпидемиологияда турмуштук өзгөчө зарылчылыкка ээ болгон S,I,R модели төмөнкү система менен сүрөттөлөт:

$$\frac{dS}{dt} = -\rho SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \rho SI - \gamma I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

мында *S, I, R* — жугушу мүмкүн болгон, жуктуруп алган жана айыккан адамдардын саны. Аталган модель эпидемиянын чокусу кандай шартта пайда болоорун, жугуштуулук коэффициентинин таасирин жана коомдук чаралардын натыйжалуулугун изилдөөгө мүмкүндүк берет [6].

Экономикалык системалардын динамикасы да дифференциалдык теңдемелер аркылуу берилет. Мисалы, капиталдын үзгүлтүксүз өсүү модели:

$$\frac{dK}{dt} = rK - \delta K$$

мында r — инвестициянын пайдалуулугу, δ — амортизация коэффициенти. Бул моделди *Р*. Солоу экономиканын узак мөөнөттүү туруктуулугун изилдөөдө негиз катары колдонгон жана *«Динамика — бул экономиканын жүрөгү»* деп белгилеген [12].

Инженердик системаларда дифференциалдык теңдемелер негизги эсептөө модели болуп саналат. Мисалы, R,L,C-чынжырда чыңалуунун динамикасы төмөнкүдөй:

$$\mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = F(t)$$

Бул теңдеме аркылуу резонанс, өтмө процесстер жана туруктуулук критерийлери аныкталат. Инженердик адабияттарда бул система «электрдик термелүүлөрдүн фундаменталдуу модели» деп аталат [5].

Математикалык моделдөөнүн алгоритмдик түзүмү

Турмуштук маселени моделдөө процессин формалдуу алгоритм катары төмөнкүдөй жазса болот:

Алгоритм 1. Реалдуу процессти математикалык моделдөө алгоритми

1. *Кадам 1.* Маселенин физикалык, биологиялык же экономикалык табиятын анализдөө.

2. *Кадам 2.* Башкы өзгөрмөлөрдү аныктоо: *x(t), v(t), N(t), I(t)* ж.б.
3. *Кадам 3.* Системанын ички байланыштарын формалдаштыруу (табиат мыйзамдары, эксперименттик маалыматтар, эмпирикалык негиздер).
4. *Кадам 4.* Бул байланыштарды дифференциалдык теңдеме түрүндө жазуу.
5. *Кадам 5.* Баштапкы жана чектик шарттарды аныктоо.
6. *Кадам 6.* Аналитикалык же сандык ыкма менен моделди чечүү.
7. *Кадам 7.* Чечимди интерпретациялоо, графикалык анализ жүргүзүү.
8. *Кадам 8.* Натыйжаны реалдуу процесске салыштырып, моделди оңдоо

Бул алгоритм моделдөөнүн универсалдуу куралын түзөт жана ар кандай тармакта бирдей колдонулушу мүмкүн.

Дифференциалдык теңдемелердин универсалдуулугу — турмуштук процесстердин өзгөрүшүн так жана кыска формада чагылдыруу мүмкүнчүлүгүндө турат. Физикада алар кыймылдын негизин түзөт, биологияда популяция менен эпидемияны сүрөттөйт, экономикада капиталды жана рынок динамикасын аныктайт, инженерияда чынжырлардын, термелүүлөрдүн жана жылуулук процесстеринин жүрүмүн жетектейт. Демек, дифференциалдык моделдер турмуштук маселелерди түшүнүүдө жана аларды алдын ала божомолдоодо өтө күчтүү инструмент ошондой эле илимий анализдин кеңири колдонулуучу фундаменталдуу методу болуп саналат.

Колдонулган адабияттар тизмеси

1. Boyce, W., DiPrima, R. Элементардык дифференциалдык теңдемелер жана чектик маселелер. Уайли, 2017.
2. Тененбаум, М., Поллард, Х. Кадимки дифференциалдык теңдемелер. Dover Publications, 1985.
3. Верхулст, П. «Калктын өсүшүнүн мыйзамы жөнүндө». Популяцияны изилдөө журналы, 1845-ж.
4. Строгац, С. Сызыктуу эмес динамика жана хаос. CRC Press, 2018.
5. Дорф, Р., Свобода, Дж. Электр схемаларына киришүү. Уайли, 2014.
6. Кермак, В., МакКендрик, А. “Эпидемиялардын математикалык теориясына салым”. Королдук коомунун эмгектери, 1927-ж.
7. Murray, J. Mathematical Biology. Springer, 2002.
8. Хирш, С., Смайл, С. Дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана сызыктуу алгебра. Академиялык басма сөз, 2004.
9. Ландау, Л., Лифшиц, механик Е. Pergamon Press, 1976.
10. Арнольд, V. Кадимки дифференциалдык теңдемелер. MIT Press, 1992.
11. Виллемс, Дж. "Динамикалар үчүн моделдер". Автомат, 1970.
12. Базыкин А.Д. "Биофизика взаимодействия популяций".
13. Марчук Г.И. "Математические модели в иммунологии".

УДК 004.9:37

БИЛИМ БЕРҮҮНҮ МААЛЫМАТТАШТЫРҮҮДАГЫ МОБИЛДИК ТИРКЕМЕЛЕР: ОФФЛАЙН РЕЖИМДЕ ИШТӨӨЧҮ ЭЛЕКТРОНДУК ОКУУ МАТЕРИАЛДАРДЫ БАШКАРУУНУН АЛГОРИТМДЕРИ

Орозбаева Айнура Абдазовна
ОшМПУ
orcid.0009-0007-4961-9727

МОБИЛЬНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ: АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫМИ УЧЕБНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ, РАБОТАЮЩИМИ В ОФЛАЙН-РЕЖИМЕ