УДК 372. 851

https://doi.org/10.56122/..v1i1.63

ГЕОМЕТРИЯНЫН ЖАЛПЫЛООЧУ САБАКТАРЫНДА “ҮЧ БУРЧТУКТУН СОНУН СЫЗЫКТАРЫ” ТЕМАСЫНА КАРАТА ТҮЙҮНДҮҮ МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

Малабеков М. – ОшМПУнун окутуучусу, аспиранты
Билал кызы Д. – магистрант, ФМм-21к

РЕШЕНИЕ КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА» НА ОБОБЩАЮЩИХ УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Малабеков М. - Преподаватель, аспирант ОшМПУ
Билал кызы Д. - магистрант, ФМм-21к

SOLVING PROBLEMS ON THE TOPIC "REMARKABLE LINES OF A TRIANGLE" IN THE LESSONS OF GENERAL GEOMETRY

Malabekova M. – Osh State Pedagogical University, instructor-graduate student
Bilal kyzy D. – undergraduate

Аннотация

Биз бул макалабызда, геометриянын жалпылоочу сабактарында “Үч бурчтуктун сонун сызыктары” деген темада үч бурчтуктун медианаларынын, биссектрисаларынын жана бийиктиктеринин окуу китебинде берилбеген көмүскөдөгү түйүндүү касиеттерин карадык. Каралган касиеттер планиметрия жана стереометрия курстарындагы маселелерди чыгарууда кеңири колдонулат. Үч бурчтуктун медианасына биссектрисасына жана бийиктигине түйүндүү маселелерди тандап, алардын айрымдарын бул макалада чыгарып көрсөттүк.

Макалада сунуш кылынган **түйүндүү** маселелер айрыкча стереометриялык фигуралардын беттеринин аянттарын, көлөмдүүсүн табууга таяныч маселе катары кеңири колдонулат.

Түйүндүү сөздөр: Сонун сызыктар, медиана, биссектриса, бийиктик, касиеттер, теоремалар.

Аннотация

В этой теме на обобщающих уроках геометрии на тему: “Замечательные линии треугольника” мы рассмотрели скрытые ключевые свойства медиан, биссектрис и высот треугольника которые не приведены учебнике. Рассмотренные свойства широко используются при решении задач по курсам планимертии и стереометрии. Мы выбрали задачи, связанные с медианой, биссектрисой и высотой треугольника , и представили некоторые из них в этой статье. Предложенные в статье ключевыезадачи широко используются в ачестве этолонных задач для нахождения площади поверхности и обьема стереометрических фигур.

Ключевые слова: замечательные линии, медиана, биссектриса, высота, свойства, теоремы.

Annotation

In this article, in the lessons of general geometry on the topic "Remarkable lines of a triangle", we examined the nodal properties of medians, bisectors and heights of a triangle, which are not given in the textbook. The considered properties are widely used in solving problems in the courses of planimetry and stereometry. We have selected problems related to the median, bisector and height of a triangle and presented some of them in this article.

The nodal problems proposed in the article are widely used as reference problems for finding areas and volumes of surfaces of stereometric figures.

Key words: Remarkable lines, median, bisector, height, properties, theorems.

Киришүү

Азыкы убакта мектептерде математиканы окуу үчүн сааттардын саны кескин кыскарып, үйрөнүлүүчү материалдардын көлөмү көбөюп барууда. Мугалим окуучуларга тиешелүү материалдарды айтып гана тим болбостон, предметти өздөштүрүүгө да үйрөтүү керек. Математиканы өздөштүрүү - бул анын ичинде стандарттуу гана эмес стандартуу болбогон ой жүгүртүүнү, оргиналдуулукту жана тапкычтыкты талап кылган маселелерди чыгара билүү.

Мектептин баардык предметтери боюнча окуу материалынын мазмунунун тынымсыз өсүшү, жаңы предметтердин пайда болушу, маалыматтардын, фактылардын, формулалардын чоң көлөмүн иштеп чыгуу, өздөштүрүү, эстеп калуу эффективдүү колдонууну үйрөнүү – баардык окуучулардын ден-соолугунун начарлашына, ашыкча иштөөгө жана натыйжалуулуктун төмөндөшүнө алып келет. Ашыкча жүктөмлөрдүн натыйжасында окутуунун натыйжалуулугу төмөн бойдон калууда.

Окутууда **түйүндүү маселелерди** колдонуу окуучулардын ашыкча окуу жүктөмдөрүн жоюуга гана эмес сабакты пландаштырууда мугалимдин ишин да, окуучулардын билимдерин текшерүүнү бир топ жеңилдетет.

“**Түйүндүү маселе”** (ключевая задача) терминин Россиянын белгилүү методисти Р. Г. Хазанкин [7] киргизип, ал эми түйүндүү маселелер менен иштөө ыкмасын методист М. И. Зильберберг берген [6].

Р. Г. Хазанкиндин айтканы боюнча **“түйүндүү маселе”** – бул башка маселелерди чыгаруу үчүн өз убагында колдонулуучу таяныч маселе катарында эсептелет.

Түйүндүү маселенин идеясы – минималдуу түйүндүү маселелерди тандап алып, окуучулар алардын чыгаруу ыкмаларын өздөрүнө сиңирип, программалык деңгээлдеги ар кандай маселелерди чыгара билүү. Бул минимум маселелер 5-7 ден ашпашы максатка ылайыктуу деп ойлойбуз.

Биз түйүндүү маселеге төмөндөгүдөй жумушчу аныктама берип, кийинки иш аракеттерибизде ал аныктаманы жетекчиликке алабыз.

Аныктама. Эгерде математикалык маселелердин мазмуну же аны чечүү ыкмасы башка бир маселени чечүү үчүн колдонулса, анда бул математикалык маселелер **түйүндүү маселелер** деп аталат. Мисалы, Герондун формуласы, Пифагордун теоремасы ж.б.у.с. түйүндүү маселелер болуп эсептелет. Себеби, ал формула жана теорема башка маселелерди чыгарууда көп колдонулат. Мындай ойду француз математиги Р. Декарт “Мен тарабынан чыгарылган ар бир маселе, жыйынтыгында башка бир маселелерди чечкенге үлгү боло алат” деп айткан [5].

Үч бурчтуктун сонун сызыктары (медианасы, биссектрисасы, бийиктиги) жөнүндө И. Бекбоев ж.б. [2], А. В. Погорелов [3], Л. С. Атанасияндын [1] геометрияларында үч бурчтуктун сонун сызыктары жөнүндө аныктоолор гана берилген, ал эми алардын касиеттери айтылган эмес. Азыркы дүйнөдө үч бурчтуктардын сонун чекиттеринин жана сызыктарынын мааниси чоң. Алар жөнүндөгү билим курулушта, архитектурада, өнөр жайында жана көптөгөн адамдардын иш-аракетинде колдонулат. Ошону менен бирге үч бурчтуктун сонун сызыктарынын касиеттери стереометриялык маселелерди чыгарууда кеңири пайдаланылат.

Биз бул макалада үч бурчтуктун сонун сызыктарынын (медиананын, биссектрисанын, бийиктиктин) касиеттери окуу китептеринде берилбеген, бирок геометриялык (стереометриялык) маселелерди чыгарууда кеңири колдонулган касиеттерди **түйүндүү маселе** катарында сунуш кылып, айрымдарын чыгарып көрсөтөбүз.

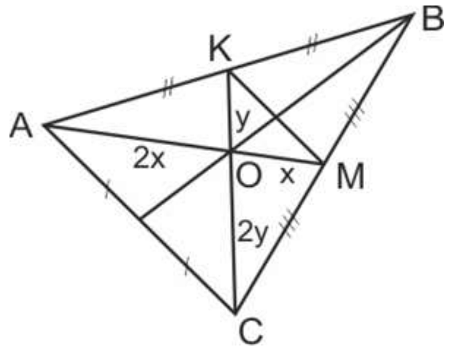
I. Үч бурчтуктун медианаларына карата түйүндүү маселелер:

1. Үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет жана кесилишкен чекитте чокусунан баштап 2:1 катышындай бөлөт.
2. Үч бурчтуктун медианасы аны тең чоңдуктагы эки үч бурчтукка бөлөт.
3. Эгерде үч бурчтуктун үч жагы белгилүү болсо, медианаларынын узундуктарын эсептегиле.
4. Тик бурчтуу үч бурчтуктун тик бурчунан жүргүзүлгөн медиана гипотенузанын жарымына барабар экендигин далилдегиле.
5. Үч бурчтуктун медианалары аны тең чоңдуктагы 6 үч бурчтукка бөлөрүн далилдегиле.

1. Үч бурчтуктун медианасынын касиети

1. Үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет жана кесилишкен чекитте чокусунан баштап 2:1 катышындай бөлөт.

Берилди:
ABC - үч бурчтугу
AM, CK, BL – медианалары
Далилдөө керек:
1. AO:OM=CO:OK=BO:OL=2:1;
2. AM ∩ BL=O, AM ∩ CK=0.



1-чийме

Далилдөө. ABC үч бурчтугунун AM жана CK медианаларын жүргүзөлү. AM жана CK медианалары O чектинде кесилишсин дейли (1-чийме). Анда MK ABC үч бурчтугунун орто сызыгы болот. Ошондой эле OMK үч бурчтугу OAC үч бурчтугуна эки бурчу боюнча окшош болушат. Мындан MK = $\frac{1}{2}$AC, MK ‖ AC болот.

OMK жана OAC үч бурчтуктарынын окшош жактарынын катышын жазсак: $\frac{OA}{OM} = \frac{OC}{OK} = \frac{AC}{MK}$ = 2:1 келип чыгат. Бул маселенин биринчи бөлүгүн далилдейт.

Маселенин экинчи бөлүгүн далилдөөнү карама-каршы метод менен далилдейбиз. Башкача айтканда, BL ∩ AM=O_1 кесилишсин дейли. BL жана AM медианалары O_1 чекитинде кесилишип, 2:1 катышындай катышышат. $O_1A:O_1M$ = OA:OM= 2:1 болгондуктан O_1 жана O чекиттери дал келишет. Демек, үч бурчтуктун үч медианасы бир чекитте кесилишет жана чокудан баштап эсептегенде 2:1 катышындай катышышат.

2. Ар кандай ABC үч бурчтугунда

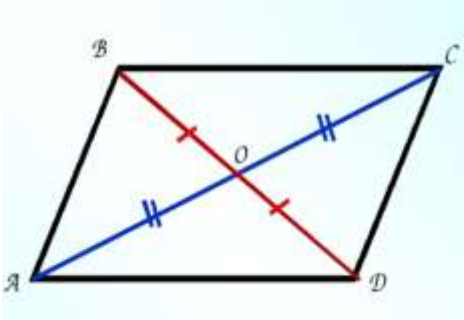
$m_a^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (1),

$m_b^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ (2),

$m_c^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ (3). формулалары орун аларын далилдегиле.

Мында m_a, m_b, m_c - ABC үч бурчтуктун медианалары

1-барабардыкты далилдейли.
Берилди:
ABD-үч бурчтугу
AO-медиана



2-чийме

Далилдөө керек: $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ экендигин.

OA кесиндисин созуп, $AO = OC$ ченеп алабыз (2-чийме). Пайда болгон ABCD - паралелограмм.

Паралелограммдын диоганалдарынын касиети боюнча :
$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$, $AC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$, $AO = m_a$ болгондуктан $(2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Мындан : $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ же $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. Ушул сыяктуу эле $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ барабардыктары далилденет.

Ушул формулалардын негизинде үч бурчтуктун медианаларынын узундуктарын эсептөөгө болот.

II. Үч бурчтуктун бийиктиктерине карата түйүндүү маселелер:

1. Үч бурчтуктун бийиктиктери бир чекитте кесилишет. Ал чекит – орто борбору деп аталат.
2. Үч бурчтуктун аянты S белгилүү болсо, $h_a = \frac{2S}{a}$, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_c = \frac{2S}{c}$ формулалары менен табыларын далилдегиле.
3. Катеттери a, в болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун бийиктиги гипотенузага түшүрүлсө, анда $h = \frac{2S}{c} = \frac{ab}{c}$ формуласы менен табыларын далилдегиле.
4. Үч бурчтуктун үч жагы белгилүү болсо, бийиктиктер h_a , h_b , h_c төмөнкү формулалар менен табыларын далилдегиле.
$h_a = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$
$h_a = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2b}$
$h_c = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2c}$

III. Үч бурчтуктун биссектрисаларына карата түйүндүү маселелер:

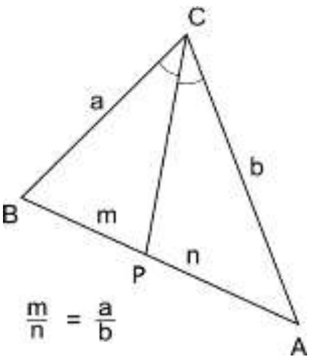
1. Үч бурчтуктун биссектрисасы карама каршы жаткан жагын жандаш жаткан жактарына пропорциялаш болгон кесиндилерге бөлөт.
2. Эгерде үч бурчтуктун эки жандаш жаткан жактары жана алардын арасындагы бурчу белгилүү болсо, үч бурчтуктун биссектрисаларынын узундуктарын эсептегиле. (Жообу: $L_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$)
3. ABC үч бурчтугунун A бурчунун биссектрисасы AL болсун дейли. CL жана LB кесиндилери $CL = \frac{ab}{b+c}$, $BL = \frac{ac}{b+c}$ табыларын далилдегиле.

4. ABC үч бурчтугунун A бурчунун L_A – биссектрисасы жүргүзүлгөн. Ал BC жагын CL = m, BL = n кесиндилерге бөлөт. L_A^2 = вс-mn барабардыгы орун аларын далилдегиле.
5. Ар кандай ABC үч бурчтугу үчүн $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$, $l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)}$, $l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}$. формулалары туура экендигин далилдегиле.

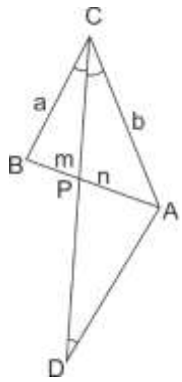
Бул маселелердин ичинен 1 жана 5 маселелерди чыгарып көрөлү.

1. Теорема (биссектрисанын касиети)

1. Үч бурчтуктун биссектрисасы карама каршы жаткан жагын жандаш жаткан жактарына пропорциялаш болгон кесиндилерге бөлөт.



3-чийме



4-чийме

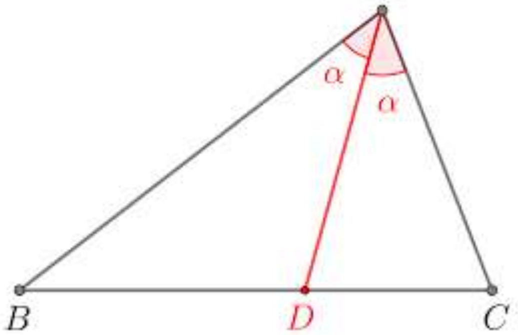
Берилди:
ABC – үч бурчтугу
CP – биссектрисасы
Далилдөө керек: BC:AC= BP:AP (3-чийме)
3-чиймедеги BC жагына жарыш болгон AD түз сызыгын жүргүзөлү (4-чийме)
BC ‖ AD, DC – паралель түз сызыктарды кесүүчү түз сызык. Мында ∠BCP= ∠ADP, анткени ал бурчтар кайчылаш бурчтар. Демек эки бурчу боюнча BPC жана APD үч бурчтуктары окшош жана $\frac{BC}{AD}$= $\frac{BP}{AP}$ болот.

∠ACD = ∠CDA болгондуктан, Δ ACD – тең капталдуу үч бурчтук. Демек $\frac{BC}{AC}$= $\frac{BP}{AP}$ келип чыгат. Демек теорема далилденди.

2. Ар кандай ABC үч бурчтугу үчүн:

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}\ , \qquad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)}\,, \qquad l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}\,.$$

формулалары орун аларын далилдегиле.



5-чийме

Далилдөө: 1-формуланы келтирип чыгаралы, калган формулалар биринчи сыяктуу эле чыгарылат. ABC үч бурчтугун B бурчунун биссектрисасы BD болсун дейли (5-чийме). Анда AD жана DC кесиндилиренин узундуктары 3-маселедегидей AD = $\frac{ab}{b+c}$, DC=$\frac{AC}{b+c}$ аныкталат. 4-маселедеги La^2 = bc – mn формуласын пайдаланып

$$l_a^2 = bc - AD \cdot DC = bc - \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} =$$

$$\frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc \cdot 2p(2p-2a)}{(b+c)^2} =$$

$$\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc \cdot 2p(2p-2a)}{(b+c)^2} = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

Мындан : $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$.

Ушул сыяктуу эле $l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-a)}$, $l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}$ формулаларын келтирилип чыгарышат.

Колдонулушу

Үч бурчтуктун бийиктиктерин, медианаларын, биссектрисаларын табуунун формулаларын колдонууга бир маселе иштеп көрсөтөлү.

Маселе. Үч бурчтуктун жактары 5, 6, 9 болсо, анын бийиктигин, медианасын жана биссектрисасынын узундуктарын тапкыла.

Чыгаруу. Үч бурчтуктун жактары боюнча бийиктигин табуу үчүн анын аянтын табуу керек. Үч бурчтуктун үч жагы белгилүү болгондуктан, Герондун формуласын колдонуп, аянтын табалы.

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10(10-9)(10-6)(10-5)} = 20\sqrt{2} .$$

Эми үч бурчтуктун бийиктиктерин табалы :

$$S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S_\Delta}{a} = \frac{2\cdot 20\sqrt{2}}{5} = 8\sqrt{2} ;$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}b \cdot h_b \Rightarrow h_b = \frac{2S_\Delta}{b} = \frac{2\cdot 20\sqrt{2}}{6} = \frac{20\sqrt{3}}{3} ;$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}c \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S_\Delta}{c} = \frac{2\cdot 20\sqrt{2}}{9} = \frac{40\sqrt{2}}{9} .$$

Үч бурчтуктун медианаларын $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ формулалары менен табабыз.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{72 + 162 - 25} = \frac{1}{2}\sqrt{209} ;$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{50 + 162 - 36} = \frac{1}{2}\sqrt{176} = \frac{1}{2}4\sqrt{11} = 2\sqrt{11} ;$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{50 + 72 - 81} = \frac{1}{2}\sqrt{41} .$$

Эми биссектрисаларынын узундуктарын табалы:

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} = \frac{2\sqrt{6\cdot 9}}{6+9}\sqrt{10(10-5)} = \frac{2\cdot 3\sqrt{6}}{15} \cdot \sqrt{50} = \frac{6\sqrt{6}}{15} \cdot 5\sqrt{2} = 2\sqrt{12} == 4\sqrt{3} ;$$

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)} = \frac{2\sqrt{5\cdot 9}}{14}\sqrt{10(10-6)} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \cdot \sqrt{10 \cdot 4} = \frac{6\sqrt{50}}{7} = \frac{30\sqrt{2}}{7} ;$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)} = \frac{2\sqrt{30}}{11}\sqrt{10(10-9)} = \frac{2\sqrt{30}}{11}\sqrt{10} = \frac{2\sqrt{300}}{11} = \frac{20\sqrt{3}}{11} .$$

Ошентип, окуучулар үч бурчтуктун жактары белгилүү болсо, анын аянтын, сонун сызыктардын узундуктарын келтирип чыгарып, үйрөнүшөт.

Жыйынтыгында, геометриянын жалпылоочу сабактарында “Үч бурчтуктун сонун сызыктары” жөнүндөгү жаңы маалыматтарды алышып, ал маалыматтарды маселелер чыгарганга кеңири колдонууга мүмкүнчүлүк алышат.

Пайдаланылган адабияттар

1. Л.С. Атанасян и др. Геометрия. учебник для 7-9 классов средней школы М. "Протвешение" 1992г. 335 с.
2. И.Б.Бекбоев ж.б. Геометрия. Орто мектептин 7-9 -кл. үчүн окуу китеби. Билим. компьютер, 2015. 288 б.
3. А.В. Погорелов . Геометрия 6-10 кл. Фрунзе " Мектеп " 1983.
4. Геометрия 7-9-классы конспекты. Ключевые задачи . Волгоград . Учитель, - 154 с.
5. Пойа Д. Математическое открытые решение задач. М. “Наука” 1976
6. Зильберберг Н. И. Уроки математики: подготовка и проведения. Кн. Для учетелей М. “Просвенешение” 1996. 176 стр.
7. Казанкин Р.Г. Как увлечь учеников математикой? “Народное образование” № 10